

Теория на вероятностите и приложна статистика (спец. Информатика)

ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ В ТВ

Опит

Всеки процес, който може да се повтори и чийто резултати са неизвестни

Елементарно събитие

Всеки изход на даден опит

Пространство от събития, S

Съкупност от всички елементарни изходи, свързани с даден опит

Събитие

Всяка съвкупност от елементарни събития (всяко подмножество на S).

Обикновено събитията се означават с главни латински букви: $A, B, C, \dots$

Един изход е **благоприятен** за събитие A , ако е елемент на A

Примери

ОПИТ: Хвърляне на монета един път.

$$S=\{\text{Л}, \text{Г}\}, \quad A=\{\text{Г}\}, \quad B=\{\text{Л}\}$$

Опит: хвърляне на зарче един път. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,

$$A=\{\text{нечетен брой точки върху зара}\}=\{1,3,5\}$$

$$B=\{\text{поне 5 точки на зара}\}=\{5,6\}$$

$$C=\{\text{по-малко от 4 точки на зара}\}=\{1,2,3\}$$

Опит: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата от 1 до 4 върху тях. $S=\{1,2,3,4\}$,

$$A=\{\text{нечетно число върху листчето}\}=\{1,3\}$$

$$B=\{\text{число по-голямо от 4 върху листчето}\}=\text{празно}$$

Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.

$$S=\{BB, AA, BA, AB\}, \text{ където } A\text{-момиче, } B\text{-момче}$$

$$A=\{\text{семейството има едно момче}\}=\{BA, AB\}$$

$$B=\{\text{семейството има поне едно момче}\}=\{BA, AB, BB\}$$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

$S = \{\text{всички точки от кръга}\}$

$A = \{\text{попадение в десетката}\} = \{\text{точките от кръга, които са означени с 10}\}$

Опит: Хвърляне на два различни зара едновременно

Елементарно събитие(изход) = наредени двойки от вида (i, j)

$S = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, \dots, 66\},$

$A = \{\text{еднакви числа върху зарчетата}\} = \{11, 22, 33, 44, 55, 66\}$

$B = \{\text{сумата от точките е 7}\} = \{16, 61, 25, 52, 34, 43\}$



Опит: Хвърляне на един зар два пъти

Опит: Хвърляне на монета до поява на лице.

$S = \{\text{Л, ГЛ, ГГЛ, ГГГЛ, ГГГГЛ, } \dots\}$

$A = \{\text{точно един герб}\} = \{\text{ГЛ}\}$

$B = \{\text{поне един герб}\} = \{\text{ГЛ, ГГЛ, ГГГЛ, ГГГГЛ, } \dots\}$

Видове пространства от елем. изходи S

крайномерни

Изброими безкрайни

неизброими

Видове събития

Достоверно

Състои се от всички изходи, свързани с даден опит = S

Невъзможно $\emptyset$

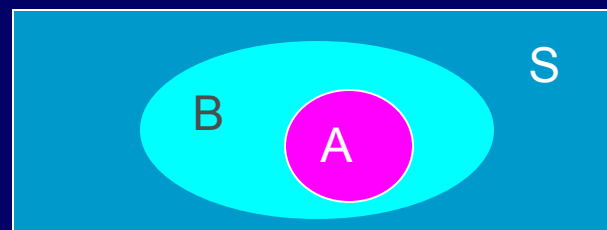
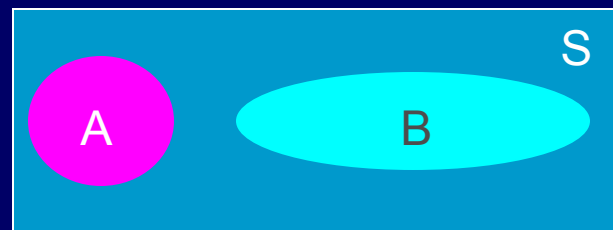
Несъвместими

Събития, които нямат общи благоприятни изходи

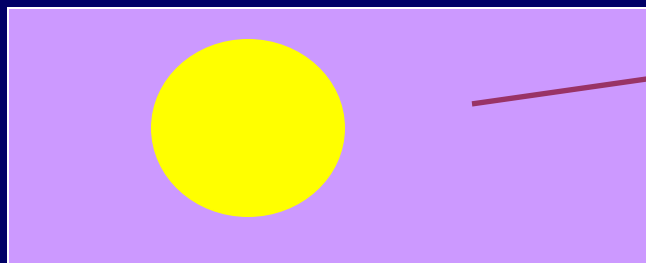
A влече B

Всеки благоприятен изход на A е благоприятен изход и за B

Допълнение



Събитието $\neg A$ се нарича допълнение на събитието A, ако се състои от всички изходи на пространството S, които не принадлежат на A



Допълнение на събитието A

$\neg A$ и A са несъвместими

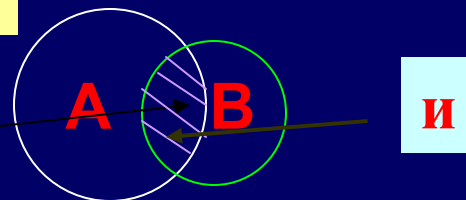
Казваме, че настъпва събитието A, ако след изпълнение на опита се наблюдава изход от A (благоприятен за A)

ДЕЙСТВИЯ СЪС СЪБИТИЯ

Нека A, B са събития

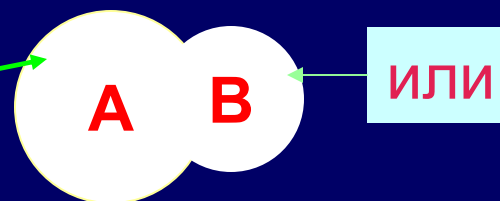
$$A \cap B$$

Сечение на две събития:



А и В е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат **както на** A така и на B .

Сума на две събития : $A \cup B$



А или В е събитие, което се състои от всички изходи, които принадлежат **или на** A , **или на** B , **или и на двете**

Примери

Карта е избрана по случаен начин от колода от 52 карти

$A = \{\text{избраната карта е черна}\}$

$B = \{\text{избраната карта е пика}\}$

$C = \{\text{избраната карта е поп}\}$

$D = \{\text{избраната карта е спатия}\}$

$B \text{ или } C = \text{Избраната карта е пика или поп} = B \cup C$

$B \text{ и } C = \text{Избраната карта е поп пика} = B \cap C$

$A \text{ или } B = \text{Избраната карта е черна} = A \cup B$

$A \text{ и } B = \text{Избраната карта е пика} = A \cap B$

$B \text{ или } D = A = B \cup D$

$B \text{ и } D = \text{празно} = B \cap D$

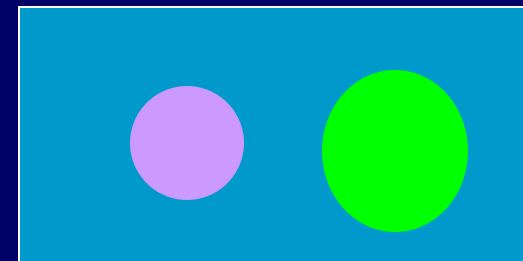
С. Христова

Свойства

Нека A и B са несъвместими събития

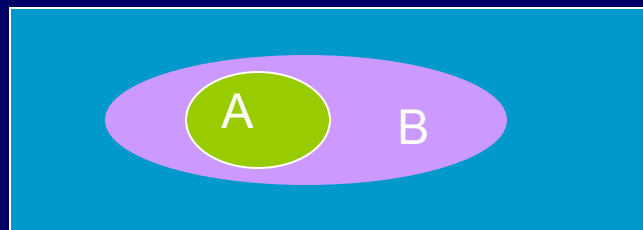
$$A \cap B = A \text{ и } B = \text{невъзможното}$$

$$A \cap \bar{A} = \text{невъзможното}$$



$$A \cup \bar{A} = S$$

Нека A влече B



$$A \cap B = A \text{ и } B = A \longrightarrow A \cap S = A \text{ и } S = A$$

$$A \cup B = A \text{ или } B = B \longrightarrow A \cup S = A \text{ или } S = S$$

Вероятност

Вероятността на едно събитие A , ще означаваме с $P(A)$.
Тя изразява възможността това събитие на настъпи.

Дефиниция

На всяко събитие A се съпоставя число $P(A)$ за което:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. P е (безкрайно) адитивна, т.е. ако $A_1, A_2, \dots$ е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Свойства на Вероятността

Свойство 1

$$P(\text{невъзможното})=0$$

Доказателство Нека $A=S$, $B=\emptyset \Rightarrow$ те са несъвместими и сумата им дава S
 $\Rightarrow$ от аксиома 3

$$1 = P(S) = P(S \cup \emptyset) = P(S) + P(\emptyset) = 1 + P(\emptyset)$$

аксиома 1

$$P(\emptyset) = 0$$

Свойство 2

Ако A влече B



$$P(A) \leq P(B)$$

Свойство 3

Доказателство

A или

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\bar{A} = S$$

от аксиома 3

$$P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

Свойство 4

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Доказателство

Ако A влече S

$$P(A) \leq 1$$

Частен случай

Класическа вероятност

Само за крайномерни пространства

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

k - брой благоприятни изходи на събитието A
 n – брой на всички възможни изходи

Примери



ОПИТ: Хвърляне на монета един път.
 $S=\{\text{Л}, \text{Г}\}, \quad A=\{\text{Г}\}, \quad B=\{\text{Л}\}$

$$P(A)=1/2, \quad P(B)=1/2, \quad P(S)=1$$

Опит: хвърляне на зарче един път. $S=\{1,2,3,4,5,6\}$,
 $A=\{\text{нечетен брой точки върху зара}\}=\{1,3,5\}$
 $B=\{\text{поне 5 точки на зара}\}=\{5,6\}$
 $C=\{\text{по-малко от 4 точки на зара}\}=\{1,2,3\}$

$$P(A)=3/6=0,5 \quad P(B)=2/6=1/3 \quad P(C)=3/6=0,5$$

Опит: избор на семейство измежду всички с две деца.
 $S=\{BB, AA, BA, AB\}$, където А-момиче, В-момче
 $A=\{\text{семейството има едно момче}\}=\{BA, AB\}$
 $B=\{\text{семейството има поне едно момче}\}=\{BA, AB, BB\}$

$$P(A)=2/4=0,5 \quad P(B)=3/4=0,75$$

Опит: избор на листче измежду 4 листчета с написани числата
от 1 до 4 върху тях. $S=\{1,2,3,4\}$,
 $A=\{\text{нечетно число върху листчето}\}=\{1,3\}$
 $B=\{\text{число по-голямо от 4 върху листчето}\}=\text{празно}$

$$P(A)=2/4$$

$$P(B)=0$$

Опит: стрелба по кръгова мишена.

$S=\{\text{всички точки от кръга}\}$

$A=\{\text{попадение в десетката}\}=\{\text{точките от кръга, които са означени с 10}\}$

$$P(A)=?????$$



**Класическата вероятност е неприложима;
пространството е безкрайно**

Пример

Два различни зара са хвърлени
едновременно един път.

А/ Пространството от събития?

Има 36 възможни изхода:

(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (1,2), (2,2), . . . , (5,6), (6,6)

Б/ каква е вероятността да се паднат еднакъв брой точки и на двата зара?

Има 6 възможни изхода: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

Вероятността е $6/36 = 1/6$

В/ Каква е вероятността сумата от точките да е 7?

Има 6 възможни изхода

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)

Вероятността е $6/36 = 1/6$

ОПИТ

Карта е избрана случайно от колода (тесте) карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността избраната карта да е червена?

$$P(A)=26/52=1/2$$

Б/ Каква е вероятността избраната карта да е купа?

$$P(B)=13/52=1/4$$

В/ Каква е вероятността избраната карта да е поп?

$$P(C)=4/52=1/13$$

Г/ Каква е вероятността избраната карта да е червен поп?

$$P(D)=2/52=1/26$$

Д/Каква е вероятността избраната карта да е поп пика?

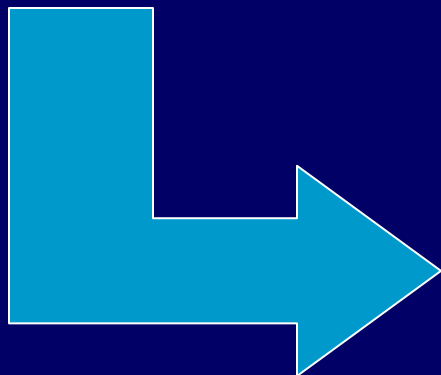
$$P(E)=1/52$$

ОПИТ

Пет карти са избрани случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е червена?

Колко са всички възможни изходи- начини за избор на 5 карти измежду 52 ?



Как да броим ???



Техники за пресмятане

Принцип на Умножението

• Ръководство на клуб – **председател**, **касиер** и **секретар** се избират по случаен начин измежду 4 човека: Ана, Борис, Васил и Георги. По колко различни начини може да се избере ръководството?



• Ръководството – **председател**, **касиер** и **секретар** се избират по случаен начин измежду 4 човека: Ана, Борис, Васил и Георги. **Ана не иска да бъде председател**. По колко различни начини може да се избере ръководството?



задачи

В ресторант има три вида супи, 4 основни ястия и 2 вида десерт. Колко различни комплекни менюта могат да се предложат

3	4	2
---	---	---

24

супа

Основно
ястие

десерт



Момиче има 5 блузи и 3 пола. Колко дни може да се облича по различен начин?

5	3
---	---

15

блуза

пола



В английската азбука има 26 букви. Колко различни пароли с по 3 символа(букви) могат да се образуват ?

26	26	26
----	----	----

$$26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$$

Колко различни пароли могат да се образуват, ако те се състоят от три букви, последвани от 2 цифри ?

26	26	26	10	10
----	----	----	----	----

1757600

Колко различни пароли, които имат повече от 3 , но не повече от 6 символа са възможни, ако се използват само цифрите 0 и 1?

с 4 символа – 2^4

с 5 символа – 2^5

с 6 символа – 2^6

$$\text{Общо: } 2^4 + 2^5 + 2^6 = 2^4(1 + 2 + 4) = 112$$

Колко различни пароли, които имат повече от 3 , но не повече от 6 символа са възможни, ако се използват само цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5?

с 4 символа – 6^4

с 5 символа – 6^5

с 6 символа – 6^6

Общо:

$$6^4 + 6^5 + 6^6 = 6^4(1 + 6 + 36) = 55728$$

Комбинации

не- наредено множество от елементи

без повторение

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Пример

По колко различни начина могат да се изберат трима плувци от 10-членен отбор?

$$C_{10}^3 = \frac{10(9)(8)}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

Пример (избор на тим)

Измежду 5 мъже и 7 жени трябва да се изберат петима, за да работят върху проект.

Колко различни 5-членни групи могат да се изберат?

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12(11)(10)(9)(8)}{1(2)(3)(4)(5)} = 792$$

Колко различни 5-членни групи могат да се изберат, ако трима са мъже, а останалите две са жени?

$$C_5^3 = \frac{5(4)(3)}{3!} = 10$$

мъже

$$C_7^2 = \frac{7(6)}{2!} = 21$$

жени

210

Ако двама души настояват или да работят заедно или да не са в групата, то колко различни 5-членни групи могат да се изберат?

1 начин
за
двамата

$$\frac{10(9)(8)}{3!} = 120$$

+

$$C_{12-2}^5 = \frac{10(9)(8)(7)(6)}{5!} = 252$$

■ Колко различни множества от n елемента съществуват (множествата могат да се състоят от по един, два, или повече елемента)?

От един елемент – 1 множество

От два елемента – $n(n-1)/2$ множества

От три елемента – $n(n-1)(n-2)/(1*2*3)$ множества и т.н.

Общо:

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$$

ОПИТ

Пет карти са избрани случайно от колода карти (52 карти)

А/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е червена?

Колко са всички възможни изходи- начини за избор на 5 карти измежду 52 ?

$$C_{52}^5 = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52(51)(50)(49)(48)}{1(2)(3)(4)(5)} = 2598960$$

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е червена, а другите 4 са черни?

$$26(C_{26}^4) = 26 \frac{26(25)(24)(23)}{1(2)(3)(4)} = 388700$$

С. Христова

$$P = \frac{388700}{2598960} \approx 0,15$$

Б/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е купа?

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е купа, а другите 4 не са купи?

$$13 (C_{39}^4) = 13 \frac{39 (38) (37) (36)}{1(2)(3)(4)} = 1069263$$

$$P = \frac{1069263}{2598960} \approx 0,41$$

В/ Каква е вероятността точно една от избраните карти да е поп?

Колко са всички възможни изходи, при които една от картите е поп, а другите 4 не са поп?

$$4 (C_{48}^4) = 4 \frac{48 (47) (46) (45)}{1(2)(3)(4)} = 778320$$

$$P = \frac{778320}{2598960} \approx 0,3$$

В/ Каква е вероятността точно три от избраните карти да са поп?

Колко са всички възможни изходи, при които три от картите са поп, а другите 2 не са поп?

$$P = \frac{4512}{2598960} \approx 0,0017$$

$$(C_4^3) (C_{48}^2) = \frac{4(3)(2)}{1(2)(3)} \frac{48(47)}{1(2)} = 4512$$

Предизвикателни задачи

за
да
ча
1

Студентка има 5 вилици, от които само 3 харесва, 4 ножа и 6 лъжици. Каква е вероятността, ако избира комплект по случаен начин, да избере вилница, която ѝ харесва? $n = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$ $k = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ $P = 72/120 = 3/5$

за
да
ча
2

Асансьор със 7 пътника тръгва от партера и спира на всеки от 9-те етажа на сграда. Каква е вероятността поне двама от пътниците да слезат на един и същ етаж? Има 9 възможности за всеки пътник: $n = 9^7$

$A =$ поне двама слезат на един и същ етаж

$\bar{A} =$ всички слезат на различни етажи

За 1-вия пътник има 9 възм. ,
за 2-рия има 8 възм. и т.н

$$k = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3$$

$$P(\bar{A}) = k / n = 0,038$$

$$P(A) = 1 - 0,038 = 0,962$$

Формула за събиране на вероятности

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B)$$

$$P(\underline{A} \text{ или } \underline{B}) =$$

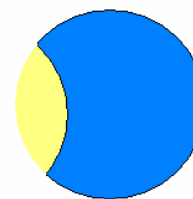
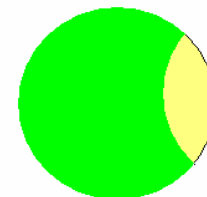
$$P(\underline{A})$$

+

$$P(\underline{B})$$

-

$$P(\underline{A} \text{ и } \underline{B})$$



При три събития

Разглеждаме събитията A, B и C

$$P(A \text{ или } B \text{ или } C) = \text{????}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap [B \cup C]).$$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC).$$

$$A \cap [B \cup C] = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\begin{aligned} P(A \cap [B \cup C]) &= P([A \cap B] \cup [A \cap C]) \\ &= P(AB \cup AC) \\ &= P(AB) + P(AC) - P(ABC). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(AB) - P(BC) - P(AC) \\ &\quad + P(ABC) \end{aligned}$$

Обобщение

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{\kappa=1}^n P(A_{\kappa}) - \sum_{\substack{\kappa, j=1 \\ \kappa < j}}^n P(A_{\kappa} A_j) + \sum_{\substack{\kappa, j, i=1 \\ \kappa < j < i}}^n P(A_{\kappa} A_j A_i) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

Пример: събиране на вероятности

Известно е, че 25% от жителите на един град четат вестник “Новинар”, 20% четат “Дневник”, 13% четат “За вас”, 10% четат и “Новинар” и “Дневник”, 8% четат и “Новинар” и “За вас”, 5% четат и “Дневник” и “За вас”, и 4% четат трите.

Ако един жител е избран случайно, то каква е вероятността той/тя да не четат вестник изобщо?

A=чете “Новинар”, V=чете “Дневник”, C=чете “За вас”, E=не чете

$$P(\bar{E})=P(A \cup B \cup C)=P(A)+P(B)+P(C) \\ -P(AB)-P(AC)-P(BC) \\ +P(ABC)=$$

Допълнението на E:
чете поне един
вестник $\bar{E}=A \cup B \cup C$

$$0,25+0,2+0,13-0,1-0,08-0,05+0,04=0,39$$

$$P(A)=1-0,39=0,61$$

Примери:

Карта е избрана от колода от 52 карти.
 $A = \{\text{картата е червена}\}$ $B = \{\text{картата е пика}\}$
 $C = \{\text{картата е поп}\}$

Намерете вероятността избраната карта да е червена или пика.

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B) = .5 + .25 - 0 = .75$$

$A \text{ и } B = \text{невъзможно}$

Намерете вероятността избраната карта да е червена или поп.

$$P(A \text{ или } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ и } C) = 1/2 + 4/52 - 2/52 = (26 + 4 - 2)/52$$

$A \text{ и } C = \{\text{червен поп}\}$

Геометрична вероятност

За безкрайномерни пространства

Нека да може да се установи **взаимно еднозначно съответствие** между S и геометричен обект върху права, в равнина или в пространството.

=> на всяко събитие съответства подмножество на този геометричен обект

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

μ е мярка на множество (геометричен обект)

Опит: стрелба по кръгова мишена.

Върху права - μ е дължина на отсечка

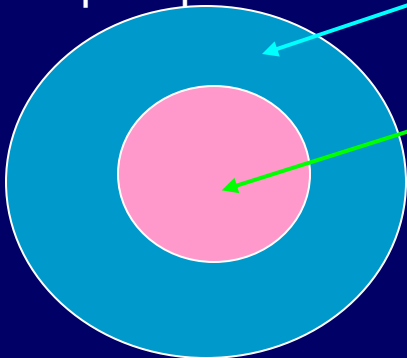
$S = \{\text{всички точки от кръга}\}$

В равнината - μ е лице на фигура

$A = \{\text{попадението е по-близо до центъра отколкото до контура}\}$

В пространството - μ е обем на тяло

$$P(A) = \frac{\text{лице на малък кръг}}{\text{лице на голям кръг}} = \frac{\pi r^2}{\pi (2r)^2} = \frac{1}{4}$$



Вероятност ли е ???

Проверка:

1. $P(A) \geq 0$

ДА

2. $P(S)=1$

ДА

3. P е (безкрайно) адитивна, т.е. ако $A_1, A_2, \dots$ е крайна или безкрайна редица от несъвместими събития, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Ако A и B са несъвместими, то множествата, които им съответстват нямат общи точки => от геометрията =>

мярката на обединението на двете множества е сума от мерките на двете множества .

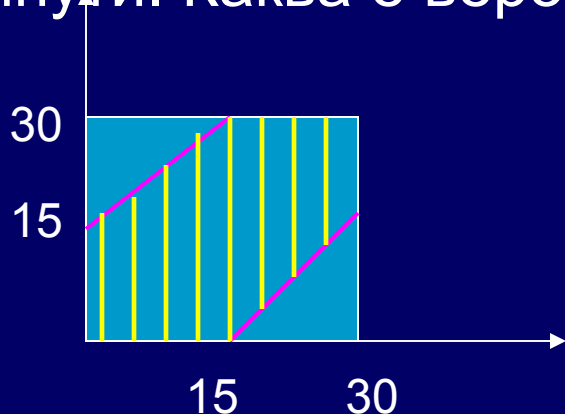
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

ДА, това е вероятност

ДА

Задача за срещата

Иванчо и Марийка си определят среща пред Ректората между 10:00 и 10:30 като всеки чака не повече от 15 минути. Каква е вероятността да се срещнат?



A=двамата ще се срещнат
x-време на пристигане на Марийка
y- време на пристигане на Иванчо

Ел. събитие : (x, y)

$S \rightarrow$ квадрат

Ще се срещнат ако $|x - y| \leq 15$

A $\rightarrow$ заштрихована част

Лицето на квадрата = $30(30) = 900$

Лицето на заштрихованата част = $900 - (15)15 = 675$

$P(A) = 675/900 = 0,75$